11 дәріс. Тақырыбы: Аффиндік координаталар жүйесі. Жазықтықтағы және кеңістіктегі координаталар жүйесі.

Жазықтықтағы және кеңістіктегі координат жүйелері.

1. Жазықтықтағы әр түрлі координат жүйелері

Анықтама 0 нүктесіне координат емес $\vec{e}$, $\vec{e}_2$ векторынан құралған 3-тікті жазықтықтағы аффиндік координат жүйесі деп аталады.

0, $\vec{e}$, $\vec{e}_2$ түрінде жазады.

0 нүктесі арқылы өтетін $\vec{e}_1$, және $\vec{e}_2$ векторына параллель түзулер сәйкесінше абцисса және ордината остері деп аталады.

Айталық, координат жүйесі берілген жазықтықта М нүктесі берілсін.

Анықтама: М нүктесі 0, $\vec{e}$, $\vec{e}_2$ координат жүйесіндегі координаттары деп оның $\overrightarrow{OM}$ радиус векторының координатын айтады.

$\vec{e}$, $\vec{e}_2$ базис вектор

$\overrightarrow{OM}$ (x,y) болса, М (x,y) белгіленеді.

Анықтама. Координат векторы ортонормаланған базис құрайтын аффиндік координат жүйесі тікбұрышты декарт координат жүйесі деп аталады.

Әдетте, 0, $\vec{e}$, $\vec{e}_2$ белгіленеді.

Нүктенің координаттарына қатысты қарапайым есептер

1-есеп.

M_1 (x_1,y_1), $M_2(x_2\ y_2)$

$\overrightarrow{MM_2}$ векторының координатын табыңыз.

Шешуі: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \begin{Bmatrix} x_2 - \chi_1 \\ \gamma_2 - \gamma_1 \end{Bmatrix}$$

2-есеп.

Ортонормаланған тік бұрышты декарт координат жүйесінде $M_1(x,y)$ нүктелері берілсе

$\overrightarrow{M_1M_2}$ ұзындығын табу керек.

1- есеп бойынша $\overrightarrow{M_1M_2} \begin{Bmatrix} x_2 - \chi_1 \\ \gamma_2 - \gamma_1 \end{Bmatrix}$

Т. $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(\chi_2 - \chi_1)^2 + (\gamma_2 - \gamma_1)^2}$

3-есеп М нүктесі M_1M_2 кесіндісі x (x=-1)қатынасында бөледі деп аталады, егер $\overrightarrow{M_1M_2}$ =x $\overrightarrow{MM_2}$ (1) теңдігі орындалса, x>0 болғанда М нүктесі беріледі. Кесіндінің созындысында жатады.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2y_2z_2)$ нүктелері, x (x=-1) M_1M_2 кесіндісін x қатынасына бөлетін М (x,y) нүктесін табу керек.

О – координат жүйесінің басы

$\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} \\ \overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM} \end{aligned}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = x(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}) \Rightarrow (1+x)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + x \cdot \overrightarrow{OM}_2 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + x \cdot \overrightarrow{OM_2}}{1+x} \Rightarrow$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (2)$$

Кесіндіні бөлуші нүктелердің координаттарының формулалары

Егер бөлуші М нүктесі M_1M_2 кесіндісінің ортасы болса, $\lambda = 1$ (1) теңдіктен шығады. Сондықтан М(x,y) – кесіндісінің ортасы десек, оның координаттары

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (3)$$

Кесіндінің ортасының координаттарының формуласы.

4-есеп. Үшбұрыштың ауырлық центрінің координаталарын табу.

M_1 (x_1, y_1)

M_2 (x_2, y_2)

M_3 (x_3, y_3) – үшбұрыштың төбелері болса, оның ауырлық центрі М(x,y) нүктесін табу керек.

Үшбұрыштың ауырлық центрі оның медианаларының қиылысу нүктесі болады. Ал бұл нүкте үшін $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ теңдігін дәлелдеу керек, олай болса

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2} \quad (4)$$

5-есеп. Төбелері берілген үшбұрыштың ауданы туралы.

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыштың ауданын осы нүктелердің координаталары арқылы өрнектеу формуласы төмендегідей болады.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_2 - x_1, & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1, & y_3 - y_1 \end{matrix} \right\| \quad (5)$$

Поляр координат жүйесі

Анықтама: О нүктесінен және кейбір $\vec{i}$ құралған жұпты поляр координат жүйесі деп атайды. О нүктесі полюс, осы нүкте арқылы өтетін оң бағыты $\vec{i}$ бағытымен анықталатын түзу поляр ось деп аталады.

Айталық, М нүктесі берілсін.

$\overrightarrow{OM}$ - М нүктесінің радиус векторы

$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho \quad \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \varphi$ делік, осы сандар М нүктесінің поляр координаттары деп аталады. $M(\varphi, \rho)$ түрінде белгіленеді. φ - поляр бұрыш, ρ - поляр радиус.

Нүктесінің поляр координатымен тікбұрышты координаталар арасындағы байланыс формулаларын келтірейік. Ол үшін $0, \vec{i}$ және $0, \vec{i}, \vec{j}$ координаттары жүйелерін қарастырайық. Кейбір М нүктесінің осы жүйелердегі координаталары сәйкесінше $(p, \rho), (x, y)$ болсын.

ΔOMN :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad (6)$$

Нүктесінің тік бұрышты координатасы поляр координаталары арқылы өрнектеледі.

$$(6) \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = arctg\frac{y}{x} \qquad (7)$$

нүктенің полярлы координаталарының тікбұрышты координаталар арқылы өрнектелуі.

Мысал:

$M\left(\frac{\pi}{3}; 2\right)$

$N\left(\frac{\pi}{4}; 3\right)$

Мысал 2.

$Q\left(-1; \sqrt{3}\right)$ нүктесінің поляр координаталарын табыңдар.

$\rho = \sqrt{1+3} = 2$

$\varphi = arctg\frac{\sqrt{3}}{-1} = arctg(\sqrt{3}) = \frac{-2\pi}{3};$

$Q = \left(\frac{2\pi}{3};2\right)$

2) Кеңістіктегі әр түрлі координат жүйелері

Анықтама: О нүктесінен, компланар емес $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ үш векторынан құралған (4)-ті кеңістіктегі аффиндік координат жүйесі деп атайды, О – координат басы, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, координат векторлары сәйкесінше $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ векторының бағытымен анықталатын түзулер координаталарының осьтері деп аталады.

Ox, Oy, Oz түрінде белгіленеді.

Координат векторлары қос-қостан өзара перпендикуляр және өзара бірлік векторлар болатын кең аффиндік координат жүйесі тік бұрышты декарт коорд. жүйесі деп аталады.

Әдетте, $\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ түрінде белгіленеді.

Ox – обцисса осьы

Oy – ордината осьы

Oz – обликата осьы

xOy, xOz, yOz – координат жазықтықтары.

Координат жазықтықтары кеңістікті 8 бөлікке бөледі. Олардың әрқайсысы октант деп аталады.

Нүктенің координаталарына қатысты жазықтықтағы координат жүйесінде қарастырылған 1-3 есептерде нәтижелері кеңістіктегі координата жүйесінде де орынды болады. Айталық

$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері берілсін.

Онда $\overrightarrow{M_1M_2}$ координаталары $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ түрінде болады.

$|M_1M_2| = \sqrt{(x^2 - x^1)^2 + (y^2 - y^1)^2 (z^2 - z^1)^2}$

$M(x, y, z)$, M_1M_2 кесіндісін бөлуші нүкте болса, оның координаталары:

$x = \frac{x^1 + xx^2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + xy_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + xz_2}{1+\lambda}$

формуласымен есептеледі.

Цилиндрлік координат жүйесі

Кеңістікте цилиндрлік координат жүйесі төмендегіше енгізіледі.

Кейбір берілген П жазықтықтығында О нүктесін және осы нүктеден шығатын Ох сәулесін таңдап алайық, және О нүктесінен шығатын. П жазықтығындағы перпендикуляр Оz осьін қарастырамыз.

М – кеңістігінің кез-келген нүктесі, N – М нүктесінің П жазықтықтағы ортогонал проекциясы болсын.

MZ – M нүктесінің OZ нүктесіндегі проекциясы.

Анықтама: М нүктесінің цилиндрлік координатасы деп - ρ, z, φ 3 санын айтады. ρ, φ - нүктесінің О, Ох поляр координата жүйесіндегі поляр координатасы. Ал Z, OMZ кесіндісінің шамасы $\pm|OM$, егер Mz нүктесі Оz осьінің оң бөлігінде орналасса + таңбасы, ал сол бөлігінде орналасса – таңбасы алынады, және $M(\rho,\varphi,z)$ түрінде белгіленеді.

ρ саны тұрақты болғандықтан $M(\rho,\varphi,z)$ нүктелері кейбір цилиндрдің бойында орналасады және оның жасаушалары Oz осьіне параллель болады. Сондықтан да нүктенің мұндай координаталары нүктенің цилиндрлік координаталары деп аталады.

Егер кеңістікте Ox,y,z тікбұрышты декарт координаталар жүйесін енгізсек М нүктесінің осы жүйедегі тік бұрышты координаталары оның цилиндрлік координаттары арқылы төмендегі формалармен өрнектеледі.

$$x = \rho\cdot\cos\varphi,\ y = \rho\cdot\sin\varphi,\ z = z \qquad (8)$$

Сфералық координат жүйесі.

Кеңістіктегі нүктенің сфералық координаталарын енгізу үшін өзара қос-қостан перпендикуляр, О нүктесінен шығатын, Ох, Оу, Оz осьтерін қарастырайық. М – кеңістігінің О нүктесінен өзге кез-келген нүктесі, ал N –О-ның Ох,у жазықтықтағы проекциясы болсын. $\rho = |OM|, \theta - Oz$ осьімен $\overrightarrow{OM}$ арасындағы бұрыш, ал $\varphi - Oz$ осьін ОМ сәулесімен сағат тіліне қарсы бұратын бұрыш және осы ρ,φ сандарын М нүктесінің сәйкесінше ендігі және бойлығы деп аталады.

Анықтама: ($\theta - mетта$) Кеңістіктегі М нүктесінің сфералық координатасы деп - ρ,φ,θ 3 санын айтады. $M(\rho,\varphi,\theta)$ белгілейді.

Мұндай нүктелер центрі О нүктесі радиусі О болатын сферада жатады.

$$0 \le \rho < \infty, \quad -\bar{n} \le \varphi \le \bar{n}$$

Кеңістіктегі нүктенің, x,y,z – тік бұрышты координаталар болса мына теңдіктерді жазуға болады. $x = \rho\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\cdot\sin\varphi, \ z = \rho\cos\theta \quad (9)$